ТЕОРЕТИЧНІ ВИКЛАДКИ

Квадратичну систему з *n* лінійних рівнянь можна задати наступним чином:

|  |  |
| --- | --- |
|  | (1) |

де:

, ,

Тоді якщо , то система (1) має розв’язок та він єдиний. Якщо система має єдиний розв’язок, то його можна знайти одним із наступних методів.

1. МЕТОД ПРОСТОЇ ІТЕРАЦІЇ (ЯКОБІ)

Сутність методу Якобі полягає в тому, що матриця розбивається на дві матриці: діагональну матрицю та матрицю . Тобто:

,

Тоді систему (1) можна переписати у наступному вигляді:

|  |  |
| --- | --- |
|  | (2) |

Помноживши систему (2) зліва на отримаємо:

|  |  |
| --- | --- |
|  | (3) |

Якщо відоме певне наближення , тоді від виразу (3) можна перейти до наступної ітераційної форми:

або

Метод Якобі для системи (1) є збіжним для довільного початкового наближення тоді і тільки тоді, коли матриця має домінантну головну діагональ:

Умова завершення ітераційного процесу Якобі при досягнені точності у спрощеній формі має вигляд:

1. МЕТОД ГАУСА-ЗЕЙДЕЛЯ

Сутність методу Гауса-Зейделя полягає в тому, що матриця розбивається на три матриці: діагональну матрицю , верхню трикутною та нижню трикутною. Тобто:

, ,

Тоді систему (1) можна переписати у наступному вигляді:

|  |  |
| --- | --- |
|  | (4) |

Якщо відоме певне наближення , тоді від виразу (4) можна перейти до наступної ітераційної форми, яка задана системою:

,

де , , ,

або

Метод Гауса-Зейделя для системи (1) є збіжним для довільного початкового наближення тоді і тільки тоді, коли матриця має домінантну головну діагональ. Також даний метод сходиться, якщо матриця симетрична і додатньо визначена.

Умова завершення ітераційного процесу Гауса-Зейделя при досягнені точності у спрощеній формі має вигляд:

3. МЕТОД НАЙШВИДШОГО СПУСКУ (ПРИЄДНАНИХ ГРАДІЄНТІВ)

Якщо матриця симетрична та додатньо визначена, то розв’язок системи (1) можна знайти методом приєднаних градієнтів.

Процес пошуку розв’язку полягає в мінімізації наступного функціоналу:

За позначено скалярний добуток.

Якщо являє собою n взаємно приєднаних векторів, то Z утворює базис для простору \ Mathbb {R} ^ п і можна виразити рішення системи в даному базисі:

Нескладними математичними підрахунками з виразу (5) отримаємо:

Вираз (6) дає нам наступний метод рішення системи (1): найти послідовність n приєднаних векторів-напрямків, а потім обчислити їх коефіцієнт .

Якщо відоме певне наближення . Тоді для (k+1) кроку алгоритму маємо:

де – розв’язок системи (3.1) на k-ій ітерації, – вектор напрямку,  
 – нев’язка на k-тому кроці.

Для довільного початкового наближення вищеописаний алгоритм буде працювати за умови якщо: