ТЕОРЕТИЧНІ АСПЕКТИ

1. МЕТОД ПРОСТОЇ ІТЕРАЦІЇ (ЯКОБІ)

1.1 Опис методу

Нехай квадратична система з *n* лінійних рівнянь задана наступним чином:

|  |  |
| --- | --- |
|  | (1.1) |

де:

, ,

Тоді якщо , то система (1.1) має розв’язок та він єдиний. Якщо система має єдиний розв’язок, то його можна знайти методом простих ітерацій (або так званим методом Якобі).

Сутність методу Якобі полягає в тому, що матриця розбивається на дві матриці: діагональну матрицю та матрицю . Тобто:

,

Тоді систему (1.1) можна переписати у наступному вигляді:

|  |  |
| --- | --- |
|  | (1.2) |

Ппомноживши систему (1.2) на зліва отримаємо:

|  |  |
| --- | --- |
|  | (1.3) |

Нехай відоме певне наближення . Тоді з формули (1.3) отримаємо ітераційний метод Якобі, який виражається наступною формулою:

або

* 1. Умова збіжності ітераційного методу Якобі

Метод Якобі для системи (1.1) є збіжним для довільного початкового наближення тоді і тільки тоді, коли матриця має домінантну головну діагональ:

* 1. Умова завершення ітераційного методу Якобі

Умова завершення ітераційного процесу Якобі при досягнені точності у спрощеній формі має вигляд:

Точніша умова завершення ітераційного процесу має вигляд:

і потребує більше обчислень.

1. МЕТОД ГАУСА-ЗЕЙДЕЛЯ

2.1 Опис методу

Нехай квадратична система з *n* лінійних рівнянь задана наступним чином:

|  |  |
| --- | --- |
|  | (2.1) |

де:

, ,

Тоді якщо , то система (2.1) має розв’язок та він єдиний. Якщо система має єдиний розв’язок, то його можна знайти методом Гауса-Зейделя.

Сутність методу Якобі полягає в тому, що матриця розбивається на три матриці: діагональну матрицю , верхню трикутною та нижню трикутною. Тобто:

, ,

Тоді систему (2.1) можна переписати у наступному вигляді:

|  |  |
| --- | --- |
|  | (2.2) |

Нехай відоме певне наближення . Тоді з формули (2.2) отримаємо ітераційний метод Гауса-Зейделя, який виражається наступною системою:

,

де , , ,

або

* 1. Умова збіжності ітераційного методу Гауса-Зейделя

Метод Гауса-Зейделя для системи (2.1) є збіжним для довільного початкового наближення тоді і тільки тоді, коли матриця має домінантну головну діагональ або матриця симетрична і додатньо визначена.

* 1. Умова завершення ітераційного методу Гауса-Зейделя

Умова завершення ітераційного процесу Гауса-Зейделя при досягнені точності у спрощеній формі має вигляд:

Точніша умова завершення ітераційного процесу має вигляд:

і потребує більше обчислень.

1. МЕТОД НАЙШВИДШОГО СПУСКУ (ПРИЄДНАНИХ ГРАДІЄНТІВ)
   1. Опис методу

Нехай квадратична система з *n* лінійних рівнянь задана наступним чином:

|  |  |
| --- | --- |
|  | (3.1) |

де:

, ,

Тоді якщо , то система (3.1) має розв’язок та він єдиний. Якщо матриця симетрична та додатньо визначена, то розв’язок системи (3.1) можна знайти методом приєднаних градієнтів.

Процес пошуку розв’язку полягає в мінімізації наступного функціоналу:

За позначено скалярний добуток.

Нехай являє собою n взаємно приєднаних векторів. Тоді Z утворює базис для простору \ Mathbb {R} ^ п і можна виразити рішення системи в даному базисі:

Користуючись виразом (3.2) можна обчислити:

Вираз (3.3) дає нам наступний метод рішення системи (3.1): найти послідовність n приєднаних векторів-напрямків, а потім обчислити коефіцієнт .

Нехай відоме певне наближення . Тоді для (k+1) кроку алгоритму маємо:

де – розв’язок системи (3.1) на k-ій ітерації, – вектор напрямку,  
 – нев’язка на k-тому кроці.

* 1. Початкові наближення

Для довільного початкового наближення вищеописаний алгоритм буде працювати за умови, що: